

Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике

К.Ю. Поляков,
д.т.н., учитель информатики ГБОУ СОШ № 163,
г. Санкт-Петербург

В данной статье рассматриваются задачи следующего типа (впервые эти задачи появились в КИМ на ЕГЭ 2015 года):

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи).

1. Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a = 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

2. Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Эти задачи можно свести к двум типовым задачам (см. подробности в статье [1]):

Задача 1. Каким должно быть множество A , чтобы множество объединение множеств A и B совпало с универсальным множеством U ?

Задача 2. Каким должно быть множество A , чтобы множество объединение множеств \bar{A} и B совпало с универсальным множеством U ?

В [1] приводятся решения этих типовых задач в терминах множеств. Множество A , которое является решением *Задачи 1*, должно «перекрыть» множество \bar{B} , то есть

$$A \geq \bar{B} \quad \text{или} \quad A_{\min} = \bar{B}.$$

Аналогично множество \bar{A} , которое является решением *Задачи 2*, должно «перекрыть» множество \bar{B} , то есть

$$\bar{A} \geq \bar{B} \quad \text{или} \quad \bar{A}_{\min} = \bar{B}, \quad \text{что равносильно} \quad A_{\max} = B.$$

Здесь мы рассмотрим различные варианты задания множеств с помощью битовых логических операций с неотрицательными числами, и приведём готовые решения также через битовые операции. Будет показано, что во многих случаях эти задачи не имеют решения в области конечных натуральных чисел.

Упрощение логического выражения

Сначала заданное в условии логическое выражение необходимо упростить и привести к понятной форме, допускающей дальнейший анализ. Для примера рассмотрим выражение из первой приведённой задачи:

$$V(x) = (x \& a = 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

Введём утверждения (предикаты):

$$A(x) = (x \& a \neq 0), \quad P(x) = (x \& 29 \neq 0), \quad Q(x) = (x \& 43 \neq 0)$$

Тогда (для краткости опускаем везде аргумент x)

$$V = \bar{A} \rightarrow (\bar{P} \rightarrow Q).$$

Раскрываем импликацию, сводя это выражение к логической сумме

$$V = \bar{A} \rightarrow (\bar{P} \rightarrow Q) = A + (\bar{P} \rightarrow Q) = A + P + Q.$$

В данном случае мы получили Задачу 1, где множество **В** определяется условием $P + Q$.

Это значит, что для всех x , принадлежащих множеству **В**, выполняется условие

$$P(x) + Q(x) = 1,$$

а для всех x , не принадлежащих множеству **В**, это условие не выполняется.

Битовые операции

Далее будем считать, что $P(x) = (x \& p \neq 0)$ и $Q(x) = (x \& q \neq 0)$, где p и q – некоторые натуральные числа. Чтобы было проще понять суть дела, будем сначала рассматривать конкретные значения p и q :

$$p = 29 = 11101_2 \quad \text{и} \quad q = 43 = 101011_2,$$

а потом сделаем обобщающие выводы для произвольных заданных натуральных чисел.

Пусть значение x в двоичной системе счисления записывается как

$$x = \dots abcdefg_2.$$

Здесь a, b, c, d, e, f и g – отдельные биты (каждый из них равен 0 или 1). Многоточием обозначены старшие биты числа x , ведь биты с номерами, большими, чем 6, тоже могут быть ненулевыми!

Выполняем побитовую операцию «И» (конъюнкцию) значения x с числами p и q :

номер бита	6	5	4	3	2	1	0	номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	b	c	d	e	f	g	x	a	b	c	d	e	f	g
p	0	0	1	1	1	0	1	q	0	1	0	1	0	1	1
$x \& p$	0	0	c	d	e	0	g	$x \& q$	0	b	0	d	0	f	g

Для выбранных чисел p и q все старшие биты числа x , обозначенные ранее многоточием, в результате конъюнкции будут обнулены.

Что же означает выполнение условий

$$P(x) = 0, \quad P(x) = 1, \quad Q(x) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x) = 1?$$

Очевидно, что если $P(x) = (x \& p) = 0$, то биты c, d, e и g в двоичной записи числа x – нулевые. Аналогично, если $Q(x) = (x \& q) = 0$, то биты b, d, f и g в двоичной записи числа x – нулевые.

Если же $P(x) = 1$ (что равносильно $x \& p \neq 0$), то среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x *есть* ненулевые (но какие именно, неизвестно!). Аналогично, если $Q(x) = 1$ (что равносильно $x \& q \neq 0$), то среди битов b, d, f и g в двоичной записи числа x *есть* ненулевые.

Задача 1

В Задаче 1 нужно найти минимальное множество, которое обеспечивает для любого натурального x выполнение условия

$$A(x) + B(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{B}(x) \rightarrow A(x) = 1$$

где $B(x)$ – известное условие в одной из шести форм:

$$1) \quad B(x) = P(x) + Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{B}(x) = \bar{P}(x) \cdot \bar{Q}(x)$$

$$2) \quad B(x) = \bar{P}(x) + Q(x) \Leftrightarrow \bar{B}(x) = P(x) \cdot \bar{Q}(x)$$

$$3) \quad B(x) = \bar{P}(x) + \bar{Q}(x) \Leftrightarrow \bar{B}(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

$$4) \quad B(x) = P(x) \cdot Q(x) \Leftrightarrow \bar{B}(x) = \bar{P}(x) + \bar{Q}(x)$$

$$5) \quad B(x) = \bar{P}(x) \cdot Q(x) \Leftrightarrow \bar{B}(x) = P(x) + \bar{Q}(x)$$

$$6) \quad B(x) = \bar{P}(x) \cdot \bar{Q}(x) \Leftrightarrow \bar{B}(x) = P(x) + Q(x)$$

Рассмотрим все шесть случаев согласно общей схеме: для всех x , при которых $B(x) = 0$ (или, что то же самое, $\bar{B}(x) = 1$), мы должны обеспечить (выбором соответствующего значения α) выполнение условия $A(x) = 1$.

Случай 1. Пусть $\bar{P}(x) \cdot \bar{Q}(x) = 1$. Определим свойства, которым должно обладать значение x для того, чтобы это равенство было выполнено.

Условие $\bar{P}(x) \cdot \bar{Q}(x) = 1$ равносильно $P(x) = Q(x) = 0$. Для чисел 29 и 43 это значит, что одновременно биты b, c, d, e, f и g в двоичной записи числа x – нулевые, то есть битовое представление числа x имеет вид:

$$x \quad \dots a \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Иначе говоря, младшие 6 битов числа x – нулевые. Но проблема в том, что мы ничего не знаем об оставшихся старших битах x , поэтому для выполнения условия $A(x) = 1$ при всех x заданной структуры нам нужно выбрать такое число α , у которого ВСЕ старшие биты (а их бесконечно много!), кроме младших шести, единичные. Поэтому $\alpha_{\min} = \infty$, то есть задача не имеет решения.

Случай 2. Пусть $P(x) \cdot \bar{Q}(x) = 1$. Это равносильно одновременному выполнению условий $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x есть ненулевые) и $Q(x) = 0$ (биты b, d, f и g в двоичной записи числа x – нулевые). Объединяя эти условия, находим, что среди битов c и e числа x есть ненулевые.

Если соответствующие биты числа α (биты с номерами 4 и 2) будут ненулевыми, то условие $A(x) = 1$ будет выполнено для всех x , для которых $P(x) \cdot \bar{Q}(x) = 1$. Поэтому заданное выражение $V(x)$ будет истинно для всех натуральных x .

Посмотрим, как этот результат можно получить с помощью битовых операций между числами p и q :

номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	b	c	d	e	f	g
p	0	0	1	1	1	0	1
q	0	1	0	1	0	1	1
α	0	0	1	0	1	0	0

Как же описать эту операцию? В числе α нужно обязательно сделать единичными биты, которые равны 1 в числе p (могут быть единичными) и равны 0 в числе q (нет гарантии, что они нулевые). Составим таблицу истинности:

p	q	α
0	0	0
0	1	0
1	0	1

1	1	0
---	---	---

Получаем (побитово) $\alpha = p \cdot \bar{q}$. Таким образом, $\alpha_{\min} = p \cdot \bar{q}$ (здесь имеются в виду побитовые операции).

Случай 3. Пусть $P(x) \cdot Q(x) = 1$. Это равносильно одновременному выполнению условий $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x есть ненулевые) и $Q(x) = 1$ (среди битов b, d, f и g в двоичной записи числа x есть ненулевые).

Заметим, что мы не знаем, какие именно биты x равны 1. Однако если мы примем $\alpha = p$, то для всех чисел, для которых $P(x) = 1$, мы обеспечиваем $V(x) = 1$ хотя бы за счёт слагаемого $A(x) = 1$. В то же время, если мы примем $\alpha = q$, то для всех чисел, для которых $Q(x) = 1$, мы также обеспечиваем $V(x) = 1$. Поэтому минимальное значение α – это минимальное из чисел p и q : $\alpha_{\min} = \min(p, q)$.

Случай 4. Пусть $\bar{P}(x) + \bar{Q}(x) = 1$. Этому условию удовлетворяют числа, для которых $P(x) = 0$ или $Q(x) = 0$. Для чисел 29 и 43 это значит, что значение x соответствует одной из масок

номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	b	0	0	0	f	0

или

номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	0	c	0	e	0	0

Нам нужно обеспечить выполнение условия $V(x) = 1$ для ВСЕХ таких чисел. Но мы ничего не знаем о том, какие биты могут быть равны 1. Поэтому, как и в случае 1, $\alpha_{\min} = \infty$, то есть задача не имеет решения.

Случай 5. Пусть $P(x) + \bar{Q}(x) = 1$. Этому условию удовлетворяют числа, для которых $P(x) = 1$ или $Q(x) = 0$. Для чисел 29 и 43 это значит, что или $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x есть ненулевые), или $Q(x) = 0$ (биты b, d, f и g в двоичной записи числа x – нулевые).

Нам нужно обеспечить выполнение условия $V(x) = 1$ для ВСЕХ таких чисел. Но если для какого-то числа x выполняется только условие $Q(x) = 0$, мы ничего не знаем о том, какие биты могут быть равны 1. Поэтому, как и в случаях 1 и 4, $\alpha_{\min} = \infty$, то есть задача не имеет решения.

Случай 6. Пусть $P(x) + Q(x) = 1$. Этому условию удовлетворяют числа, для которых $P(x) = 1$ или $Q(x) = 1$. Для чисел 29 и 43 это значит, что $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x есть ненулевые) или $Q(x) = 1$ (среди битов b, d, f и g в двоичной записи числа x есть ненулевые). Поэтому если мы перекроем единичными битами числа α ВСЕ биты, которые могут быть равны 1 в обоих случаях (это биты b, c, d, e, f и g), то обеспечим выполнение условия $V(x) = 1$ для всех таких чисел. Поэтому для нашего примера

номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	b	c	d	e	f	g
p	0	0	1	1	1	0	1
q	0	1	0	1	0	1	1
α	0	1	1	1	1	1	1

В этом случае $\alpha_{\min} = p + q$ (здесь имеются в виду побитовые логические операции).

Задача 2

В Задаче 2 нужно найти максимальное множество, которое обеспечивает для любого натурального x выполнение условия

$$\overline{A}(x) + B(x) = 1 \Leftrightarrow \overline{B}(x) \rightarrow \overline{A}(x) = 1$$

где $B(x)$ – известное условие в одной из шести форм:

- 1) $B(x) = P(x) + Q(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x) = \overline{P}(x) \cdot \overline{Q}(x)$
- 2) $B(x) = \overline{P}(x) + Q(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x) = P(x) \cdot \overline{Q}(x)$
- 3) $B(x) = \overline{P}(x) + \overline{Q}(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x) = P(x) \cdot Q(x)$
- 4) $B(x) = P(x) \cdot Q(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x) = \overline{P}(x) + \overline{Q}(x)$
- 5) $B(x) = \overline{P}(x) \cdot Q(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x) = P(x) + \overline{Q}(x)$
- 6) $B(x) = \overline{P}(x) \cdot \overline{Q}(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x) = P(x) + Q(x)$

Рассмотрим все шесть случаев согласно общей схеме: для всех x , при которых $B(x) = 0$ (или, что то же самое, $\overline{B}(x) = 1$), мы должны обеспечить (выбором соответствующего значения α) выполнение условия $A(x) = 0$.

Случай 1. Пусть $\overline{P}(x) \cdot \overline{Q}(x) = 1$. Условие $\overline{P}(x) \cdot \overline{Q}(x) = 1$ равносильно $P(x) = Q(x) = 0$. Для чисел 29 и 43 это значит, что одновременно биты b, c, d, e, f и g в двоичной записи числа x – нулевые, то есть битовое представление числа x имеет вид:

$$x \quad \dots a \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Иначе говоря, младшие 6 битов числа x – нулевые. Поэтому **максимальное** число α , при котором для всех таких x обеспечивается выполнение условия $A(x) = 0$ (и, следовательно, $V(x) = 1$), содержит 6 младших единичных битов. В общем случае легко определить, что $\alpha_{\max} = p + q$ (здесь имеются в виду побитовые логические операции).

Случай 2. Пусть $P(x) \cdot \overline{Q}(x) = 1$. Это равносильно одновременному выполнению условий $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x *есть* ненулевые) и $Q(x) = 0$ (биты b, d, f и g в двоичной записи числа x – нулевые). Нам нужно для всех таких чисел обеспечить выполнение условия $A(x) = 0$. Если установить в α все биты, которые гарантированно равны 0 в x , равными 1, то условие $A(x) = 0$ будет выполнено. Устанавливать другие биты числа α равными 1 мы не можем, потому что они могут быть равны 1, тогда $A(x) = 1$ и $V(x) = 0$. Поэтому $\alpha_{\max} = q$. Заметим, что в этом случае **значение p вообще не влияет на результат**.

Случай 3. Пусть $P(x) \cdot Q(x) = 1$. Это равносильно одновременному выполнению условий $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x *есть* ненулевые) и $Q(x) = 1$ (среди битов b, d, f и g в двоичной записи числа x *есть* ненулевые).

Заметим, что мы не знаем, какие именно биты x равны 0. Поэтому выполнение условия $A(x) = 0$ (и, соответственно, $V(x) = 1$) можно обеспечить только выбором $\alpha_{\max} = 0$. **Решений среди натуральных чисел α нет.**

Случай 4. Пусть $\bar{P}(x) + \bar{Q}(x) = 1$. Этому условию удовлетворяют числа, для которых $P(x) = 0$ или $Q(x) = 0$. Для чисел 29 и 43 это значит, что значение x соответствует одной из масок

номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	b	0	0	0	f	0

или

номер бита	6	5	4	3	2	1	0
x	a	0	c	0	e	0	0

Нам нужно обеспечить выполнение условия $V(x) = 1$ для ВСЕХ таких чисел. Заметим, что в обеих масках биты 3 и 0 равны нулю, поэтому их можно выбрать единичными в числе α . В общем случае $\alpha_{\max} = p \cdot q$ (имеются в виду побитовые операции).

Случай 5. Пусть $P(x) + \bar{Q}(x) = 1$. Этому условию удовлетворяют числа, для которых $P(x) = 1$ или $Q(x) = 0$. Для чисел 29 и 43 это значит, что или $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x есть ненулевые), или $Q(x) = 0$ (биты b, d, f и g в двоичной записи числа x – нулевые).

Нам нужно обеспечить выполнение условия $V(x) = 1$ для ВСЕХ таких чисел. Но если для какого-то числа x выполняется только условие $P(x) = 1$, мы ничего не знаем о том, какие биты могут быть равны 0. Поэтому чтобы выполнить условие $A(x) = 0$ мы должны обнулить ВСЕ биты числа α , то есть $\alpha_{\max} = 0$. **Решений среди натуральных чисел α нет.**

Случай 6. Пусть $P(x) + Q(x) = 1$. Этому условию удовлетворяют числа, для которых $P(x) = 1$ или $Q(x) = 1$. Для чисел 29 и 43 это значит, что или $P(x) = 1$ (среди битов c, d, e и g в двоичной записи числа x есть ненулевые), или $Q(x) = 1$ (среди битов b, d, f и g в двоичной записи числа x есть ненулевые).

Нам нужно обеспечить выполнение условия $V(x) = 1$ для ВСЕХ таких чисел. Но выполнение условий $P(x) = 1$ или $Q(x) = 1$ не даёт нам информации о том, какие биты могут быть равны 0. Поэтому чтобы выполнить условие $A(x) = 0$ мы должны обнулить ВСЕ биты числа α , то есть $\alpha_{\max} = 0$. **Решений среди натуральных чисел α нет.**

Итоговая таблица решений

	$B(x)$	Задача 1 (α_{\min})	Задача 2 (α_{\max})
1	$P(x) + Q(x)$	∞	$p + q$ (побитово)
2	$\bar{P}(x) + Q(x)$	$p \cdot \bar{q}$ (побитово)	q
3	$\bar{P}(x) + \bar{Q}(x)$	$\min(p, q)$	0
4	$P(x) \cdot Q(x)$	∞	$p \cdot q$ (побитово)
5	$\bar{P}(x) \cdot Q(x)$	∞	0
6	$\bar{P}(x) \cdot \bar{Q}(x)$	$p + q$ (побитово)	0

Ячейки, выделенные фоном одного цвета, позволяют в некоторой степени проследить дуализм условий и решений Задач 1 и 2. Для них $B(x)$ в Задаче 1 совпадает с $\bar{B}(x)$ в дуальной Задаче 2.

Литература

1. К.Ю. Поляков, Множества и логика в задачах ЕГЭ // Информатика, № 10, 2015, с. 38-42.